|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Курсовой проект | | |
| по дисциплине «Численные методы» | | |
|  | | |
|  | | |
|  |  |  |
| Группа ПМ-92 | Артюхов Роман |
| Вариант 22 |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватели | Соловейчик Юрий Григорьевич |
|  |  |
| Новосибирск, 2021 | | |

Задача (вариант 22):

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по квадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

1. Постановка задачи

Эллиптическая краевая задача для функцииопределяется дифференциальным уравнением:

,

заданным в некоторой области  с границей и краевыми условиями:



В декартовой системе координат это уравнение может быть записано в виде:

, в которых

- значение искомой функциина границе

- значение на производной функциипо направлению внешней нормали к поверхности 

- коэффициент диффузии.

1. Теоретическая часть
   1. Вариационная постановка в форме уравнения Галеркин

В операторной форме исходное уравнение можно переписать в форме , где - оператор, действующий в Гильбертовом пространствеНам нужно найти приближение к элементу, соответствующее заданному элементу.

Потребуем, чтобы невязка дифференциального уравнения была ортогональна некоторому пространству функций , которое мы будем называть пространством пробных функций, т.е.



Применяя формулу Грина (интегрирование по частям для многомерного случая), перепишем уравнение в виде:



Учитывая : 

Теперь учтем заданные краевые условия.

Поскольку значит интеграл ,то интегральное соотношение примет вид:



Исходя из того, что перепишем уравнение в виде:



Исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то





Отсюда получаем уравнение в виде:



* 1. Конечноэлементная дискретизация

На каждом конечном элементе  - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями , такими, что 

Любая линейная на, функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника. Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся 3 узла – вершины треугольника.

Получаем:



При вычислении интегралов от произведений вида по треугольнику или по любому его ребру можно использовать формулы:



где  — это площадь треугольника

- матрица координат его вершин.

Учитывая построение - функций, получаем следующие соотношения:



Получаем систему:



Находим коэффициенты линейных функций







* 1. Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости G и массы M каждого конечного элемента , перейдем к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области представим в виде суммы интегралов по областям без учёта краевых условий.



Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3x3.

* + 1. Построение матрицы жёсткости

Рассмотрим первый член в вышеуказанном выражении для k-го конечного элемента:



Учитывая, что , получаем:



В поставленной задаче требуется разложить  по квадратичным базисным функциям: , где – значение коэффициента  в соответствующих узлах, - квадратичные базисные функции, которые определяются следующим образом:



Таким образом, 

Интегралы от базисных функций равны:





Учитывая интегралы получим:



Где - сумма значений коэффициента на серединах трех сторон конечного элемента.

* + 1. Построение матрицы массы

Рассмотрим второй член в выражении для k-го конечного элемента:



Учитывая, что , получаем:



* + 1. Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:



можно представить в виде:

 - значение в вершинах треугольника.



Получим:





* + 1. Сборка глобальной матрицы и глобального вектора правой части.

В качестве базисных функций  берутся финитные функции, отличные от нуля лишь на нескольких конечных элементах. Поэтому большинство интегралов будут равны нулю. Ненулевыми интегралы будут в том случае, если базисные функции и  являются ненулевыми на конечном элементе .

, L – количество конечных элементов.

При формировании глобальной матрицы из локальных, полученные суммированием матриц жесткости и массы, учитываем соответствие локальной и глобальной нумерации каждого конечного элемента. Зная глобальные номера узлов конечного элемента, определяем и то, какие элементы глобальной матрицы изменятся при учете текущего конечного элемента. Аналогично с правой частью. При учете текущего локального вектора изменяется те элементы глобального вектора правой части, номера которых совпадают с глобальными номерами узлов, присутствующих в этом конечном элементе.

* 1. Учет краевых условий
     1. Учет первых краевых условий

Для учета первых краевых условий, в глобальной матрице и глобальном векторе находим соответствующую глобальному номеру краевого узла строку, и ставим на этой строке вместо диагонального элемента единицу, а вместо элемента с таким номером в вектор правой части – значение краевого условия.

* + 1. Учет вторых и третьих краевых условий

Рассмотрим краевые условия второго и третьего рода



Отсюда получаем, что для учета краевых условий необходимо вычислить интегралы:



Краевые условия второго и третьего рода задаются на ребрах, т.е. определяются двумя узлами, лежащими на ребре.

Параметр  на  будем считать постоянным

Параметр будем раскладывать по двум базисным функциям, определенным на этом ребре.



- линейные базисные функции, которые имеют также свои глобальные номера во всей расчетной области

 - значения функции  в узлах ребра.

Функцию  раскладываем аналогичным образом.

Тогда интегралы примет вид:



Фактически, решая задачу учета краевых условий второго и третьего рода, мы переходим к решению одномерной задачи на ребре для того, чтобы занести соответствующие результаты в глобальную матрицу и вектор.

Для учета вклада вторых и третьих краевых условий рассчитываются две матрицы размерностью 

Интегралы считаем по ребру, следовательно вычислять будем по формуле:



- длина ребра, 

Интегралы, посчитанные по приведенным формулам, будут равны:



Добавляя эту матрицу в левую часть, на места, соответствующие номерам узлов, получаем учет третьих краевых условий.

При расчете  и  должно учитываться направление нормали 

Если рассматривать нормаль к наклонной стороне области, то для каждой из двух точек ребра, в которых рассматриваются нормали, значения производных решения по обеим координатам будет ненулевыми, если, производная самой функции по какой-либо координате не будет нулевой.